MINISTERE DE L'URBANISME
ET DU LOGEMENT

E.I.T.P.E. 1984

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 2 heures)

1 - Soit A une matrice carrée d'ordre n, à éléments réels ou complexes notés a_{ij}, i indice de ligne, j indice de colonne, i et j variant de 1 à n.

Démontrer que, si on a pour tout i, strictement,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pour } j \neq i$$

la matrice A est régulière (théorème d'Hadamard).

On pourra utiliser le système d'équations linéaires $AX=0$ où X est une matrice colonne d'éléments inconnus $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2 - a) - Montrer que les images dans le plan de Cauchy (plan représentatif des nombres complexes) des valeurs propres de la matrice A sont dans la région constituée de la réunion des intérieurs et des pourtours de n disques circulaires dont les centres sont les points A_k d'affixes a_{kk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Montrer qu'il existe un second ensemble de disques analogues dans la réunion desquels sont aussi les images des valeurs propres de A.

b) - Si M est le plus grand des modules des a_{ij}, montrer que tous les modules des valeurs propres de A sont inférieurs ou égaux à nM.

3 - On applique 2) aux matrices "stochastiques" dont les éléments a_{ij} sont réels, positifs ou nuls, tels que la somme des éléments de chaque ligne soit égale à l'unité.

Montrer que 1 est valeur propre et que toute valeur propre a un module inférieur ou égal à 1.

Dans quel cas peut-on affirmer que la seule valeur propre de module 1 est le réel + 1 ? Donner un exemple simple où il n'en est pas ainsi.

4 - On considère la matrice "bande" définie par :

$$a_{ij} = \delta(i-1,j) + \delta(i,j-1)$$

où δ est le symbole de Kronecker : $\delta(p,q) = 0$ si $p \neq q$, $\delta(p,p) = 1$

Montrer que toutes les valeurs propres sont réelles, comprises entre -2 et +2. Les calculer.

5 - On considère la matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \lambda \text{ réel}$$

a) - Montrer que si $|\lambda| \leqslant 2$, les modules de toutes les valeurs propres sont $\leqslant 3$ et que, pour tout λ, la valeur absolue de la partie imaginaire d'une valeur propre est $\leqslant 2$.

b) - Montrer que, quel que soit λ, il existe trois valeurs propres réelles et deux non réelles, et il y a toujours une valeur propre strictement supérieure à 2 et une strictement inférieure à 2.

Pour quelles valeurs de λ existe-t-il une valeur propre négative ?

Pour quelles valeurs de λ existe-t-il deux valeurs propres de somme 2 ?